

**Titre :** Réseaux compositionnels pour la réduction de dimension non linéaire et l'apprentissage d'opérateurs : application aux EDPs dépendant de paramètres.

**Mot clés :** Méthodes basées sur les données, Réduction de dimension, Apprentissage d'opérateurs, Réseaux compositionnels

**Résumé :** Cette thèse se concentre sur le développement de nouvelles méthodes d'apprentissage appliquées à des équations aux dérivées partielles (EDPs) paramétrées. Dans le Chapitre 2, nous étudions l'apprentissage d'un opérateur de transport en régime harmonique à partir d'opérateurs neuronaux. Nous proposons dans ce cadre une nouvelle architecture d'opérateur neuronal de Fourier (FNO) spécifiquement adaptée à ce problème, permettant d'atteindre une meilleure précision avec moins de données que les approches classiques. Nous nous focalisons ensuite sur les méthodes de réduction de dimension non linéaires. Après avoir dressé un état de l'art de l'approximation non linéaire dans le Chapitre 3, nous introduisons au Chapitre 4 une nouvelle approche basée sur des réseaux compositionnels de polynômes. L'algorithme proposé construit un auto-encodeur (dont l'encodeur est linéaire et le déco-

deur est basé sur des compositions de polynômes) capable d'atteindre simultanément une précision requise et une constante de Lipschitz cible pour le décodeur. Cette dernière propriété est cruciale pour garantir la stabilité du modèle. Dans le Chapitre 6, nous proposons une méthode d'apprentissage d'opérateurs d'EDPs reposant sur la réduction de dimension non linéaire, en exploitant particulièrement l'architecture introduite au Chapitre 4. Enfin, le Chapitre 7 aborde le problème d'estimation d'état. Nous y introduisons une nouvelle approche, s'appuyant à nouveau sur la méthode non linéaire du Chapitre 4, qui combine un algorithme de descente de gradient naturelle et une stratégie d'échantillonnage optimal pour reconstruire un état physique à partir de quelques observations seulement.

**Title:** Compositional networks for nonlinear dimensionality reduction and operator learning: application to parameter-dependent PDEs

**Keywords:** Data-driven methods, dimension reduction, operator learning, compositional networks

**Abstract:** This thesis focuses on the development of novel data-driven methods applied to parameter-dependent partial differential equations (PDEs). In Chapter 2, we study the application of neural operators for a time-harmonic transport equation, and propose a novel Fourier Neural Operator (FNO) architecture specifically tailored to this problem, enabling us to achieve higher accuracy with less training data than classical approaches. We then focus on nonlinear dimensionality reduction methods. After presenting a state-of-the-art on nonlinear approximation methods in Chapter 3, we introduce in Chapter 4 a novel approach based on compositional polynomial networks. The proposed algorithm constructs an autoencoder

(featuring a linear encoder and a decoder based on compositions of polynomials) capable of simultaneously achieving a required target accuracy and a target Lipschitz constant for the decoder. This latter property is crucial for ensuring the stability of the model. In Chapter 6, we propose a PDE operator learning method relying on nonlinear dimensionality reduction, specifically exploiting the architecture introduced in Chapter 4. Finally, Chapter 7 addresses the state estimation inverse problem. We introduce a novel approach, building once again on the nonlinear method from Chapter 4, which combines a natural gradient descent algorithm with an optimal sampling strategy to reconstruct a full state from only few observations.