

Titre : Analyse mathématique et numérique d'un contrôle optimal bilinéaire pour le système de Keller-Segel dégénéré

Mots clés : Chimiotaxie, Keller Segel dégénéré, contrôle optimal bilinéaire, problème adjoint, méthodes des éléments finis, méthodes des volumes finis, simulations numériques.

Résumé : Cette thèse est consacrée à l'étude théorique et numérique d'un problème de contrôle optimal appliqué à un système de chimiotaxie de type Keller-Segel, caractérisé par une diffusion doublement dégénérée. Un contrôle bilinéaire est introduit dans l'équation de la concentration du chemoattractant afin de guider la densité cellulaire et la concentration chimique vers des états cibles, tout en minimisant une fonction coût quadratique sous les contraintes imposées par la formulation faible du système contrôlé. Cette nouvelle formulation s'affranchit de la régularité des solutions fortes.

Afin d'établir l'existence de solutions pour le problème direct, des solutions optimales, ainsi que du problème adjoint associé aux multiplicateurs de Lagrange, une approche combinant la semi-discrétisation en temps avec la méthode de Faedo-Galerkin est mise en œuvre. Cette stratégie permet de démontrer l'existence de solutions faibles pour le problème dans le cas non dégénéré. En introduisant deux types distincts de dégénérescence sur la fonction de diffusion, deux formulations faibles appropriées sont proposées afin d'assurer l'existence de solutions au problème adjoint correspondant.

Par la suite, l'existence des multiplicateurs de Lagrange est établie à l'aide de deux techniques complémentaires : la

première repose sur une analyse directe de la formulation faible du problème adjoint, tandis que la seconde s'appuie sur la dérivée de Fréchet du système linéarisé, en conjonction avec le théorème du point régulier, afin de garantir les conditions d'optimalité nécessaires.

Sur le plan numérique, deux stratégies distinctes sont étudiées. La première, de type optimiser puis discrétiser, repose la discrétisation du problème direct et adjoint par la méthode des éléments finis en espace et la méthode d'Euler semi-implicite en temps. L'optimisation est réalisée par la méthode du gradient avec projection. Ce travail a donné lieu à l'implémentation d'un code de calcul avancé sous FreeFem++, permettant de valider les résultats théoriques par des simulations numériques. La seconde stratégie, de type discrétiser puis optimiser. Le système direct est discrétisé par une méthode de type volumes (schéma TPFA ou CVFE), assurant la stabilité du schéma et la conservation locale. Ensuite, le système adjoint discret est dérivé rigoureusement à partir du système linéarisé obtenu par la dérivation du problème direct discret.

Ces travaux ouvrent également des perspectives numériques, notamment l'exploration d'algorithmes d'optimisation plus performants que la méthode du gradient, afin de mieux traiter les modèles dégénérés.

Title : Mathematical and Numerical Analysis of a Bilinear Optimal Control Problem for the Degenerate Keller-Segel System

Keywords : Chemotaxis, degenerate Keller-Segel system, bilinear optimal control, adjoint problem, finite element methods, finite volume methods, numerical simulations.

Abstract : This thesis is dedicated to the theoretical and numerical study of an optimal control problem applied to a chemotaxis system of Keller-Segel type, characterized by a doubly degenerate diffusion.

A bilinear control is introduced in the equation of the chemoattractant concentration in order to steer both the cell density and the chemical concentration toward desired target states, while minimizing a quadratic cost functional under the constraints imposed by the weak formulation of the controlled system. This new formulation circumvents the need for strong solution regularity.

To establish the existence of solutions for the state system, the optimal solutions, and the adjoint problem associated with the Lagrange multipliers, an approach combining time semi-discretization with the Faedo-Galerkin method is implemented. This strategy allows the proof of existence of weak solutions for the problem in the non-degenerate case. By introducing two distinct types of degeneracy in the diffusion function, two suitable weak formulations are proposed to ensure the existence of solutions for the corresponding adjoint problem.

Subsequently, the existence of Lagrange multipliers is established using two complementary techniques: the first

relies on a direct analysis of the weak formulation of the adjoint problem, while the second is based on the Fréchet derivative of the linearized system, in conjunction with the regular point theorem, to ensure the necessary optimality conditions.

On the numerical side, two distinct strategies are explored. The first, of the optimize-then-discretize type, relies on discretizing the state and adjoint problems using the finite element method in space and a semi-implicit Euler method in time. Optimization is carried out via the projected gradient method. This work led to the implementation of an advanced computational code using FreeFem++, allowing the validation of theoretical results through numerical simulations. The second strategy, of the discretize-then-optimize type, involves discretizing the state system using a finite volume method (TPFA or CVFE schemes), ensuring scheme stability and local conservation. The discrete adjoint system is then rigorously derived from the linearized system obtained by differentiating the discrete state problem. These contributions also open up numerical perspectives, particularly the exploration of more efficient optimization algorithms than the gradient method, in order to better handle degenerate models.